Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 1

Abgabe: Montag, den 22. April 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 1.1 (*2+1+2 Punkte*)

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Unterräume. Zeigen Sie

(a) $(U + W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$

(b) $U^\circ + W^\circ \subseteq (U \cap W)^\circ$.

Folgern Sie

(c) $U^\circ + W^\circ = (U \cap W)^\circ$.
(*Hinweis: Wegen (b) reicht es,* $\dim(U^\circ + W^\circ) = \dim(U \cap W)^\circ$ *zu zeigen.*)

Aufgabe 1.2 (*5 Punkte*)

Es sei $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_5\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^5$ und W der durch die Vektoren

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= e_1 + 2e_2 + e_3\\ \alpha_2 &= e_2 + 3e_3 + 3e_4 + e_5\\ \alpha_3 &= e_1 + 4e_2 + 6e_3 + 4e_4 + e_5\end{aligned}$$

aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^5$. Finden Sie eine Basis für W^0.

Aufgabe 1.3 (*2+3+1 Punkte*)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum $U \subseteq V$ heißt *Hyperebene* (oder *Hyperraum* oder Unterraum der *Kodimension 1*).

(a) Sei $W = \ker(f)$ für ein $f \in V^* \backslash \{0\}$. Zeigen Sie, dass $W \subseteq V$ eine Hyperebene ist.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ und $W \subseteq V$ ein k-dimensionaler Unterraum. Zeigen Sie, dass W der Durchschnitt von $(n-k)$-vielen Hyperebenen ist.

(c) Zeigen Sie die Umkehrung von (a): Sei $W \subseteq V$ eine Hyperebene. Dann ist $W = \ker(f)$ für ein $f \in V^* \backslash \{0\}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (*1+1+2 Bonuspunkte*)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

(a) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie: Es existiert ein Unterraum U von V so, dass $W \cap U = \{0\}$ und $W + U = V$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels: Der Unterraum U aus (a) ist eindeutig.

(c) Es seien nun W_1 und W_2 beliebige Unterräume von V der Dimensionen k und l. Bekanntlich ist dann $W_1 \cap W_2$ ebenfalls Unterraum von V. Zeigen Sie: $\dim(W_1 \cap W_2) \geq (k + l - n)$.